① Fie $a \in (0, \infty)$ și

$x_1, x_2, \ldots x_n \in \mathbb{R}$ astfel încât

$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$

Arătați că

$$a^{x_1} + \sqrt{a^{x_2}} + \sqrt[3]{a^{x_3}} + \cdots + \sqrt[n]{a^{x_n}} \geq$$

$$\geq \frac{n(n+1)}{2} \cdot (n!)^{-\frac{2}{n+1}}$$

(Concurs Gh. Lazăr, 2012)

② Fie $z \in \mathbb{C}$

Dacă $|z+1| \leq 1$, $|z^2+1| \leq 1$ și

$|z^3+1| \leq 1$, arătați că $z = 0$.

③ Fie $r > 0$

Aflați funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care imaginea oricărui interval închis de lungime L este un interval închis de lungime $r \cdot L$.

(Vasile Pop)

④ Fie $a, b, c \in \mathbb{C}$ astfel încât

$$|a| = |b| = |c| = |a + b + c| .$$

Arătați că suma a două numere dintre a, b, c este 0.

⑤ Fie $m, n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$ a. î.

$$\operatorname{tg} \frac{k\pi}{n} = \sqrt{m}$$

Calculați

$$C_n^1 - m C_n^3 + m^2 C_n^5 - m^3 C_n^7 + \dots$$

(Supliment G. M.)

(6) Rezolvați în $\mathbb{R}^*$ ecuația:

$$2^{3x-1}\cdot 3^{\frac{3}{x}-1}+3^{3x-1}\cdot 5^{\frac{3}{x}-1}+$$

$$+5^{3x-1}\cdot 2^{\frac{3}{x}-1}=2^8+3^8+5^8$$

(Concurs Gh. Lazăr)

(7) Câte funcții

$$f:\{1,2,\dots,n\}\to\{1,2,\dots,n\}$$

sunt:

a) injective

b) strict crescătoare

c) crescătoare

d) cu proprietatea

$$x>y \Rightarrow f(x)-f(y)>1$$

(8) Găsiți funcțiile $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$

$$f(xy) = (f(x))^{f(y)}, \quad (\forall)\, x, y \in (0, \infty)$$

(9) Fie $a, b \in \mathbb{C}$. Arătați că sunt echivalente:

a) $|az + b\bar{z}| \le 1$, $(\forall)\, z \in \mathbb{C}$ cu $|z| = 1$

b) $|a| + |b| \le 1$

(OJM 2012)

Soluții

① Folosim inegalitatea

$$\frac{\sum \alpha_i \cdot a_i}{\sum \alpha_i} \geq \left(\prod a_i^{\alpha_i}\right)^{\frac{1}{\sum \alpha_i}}$$

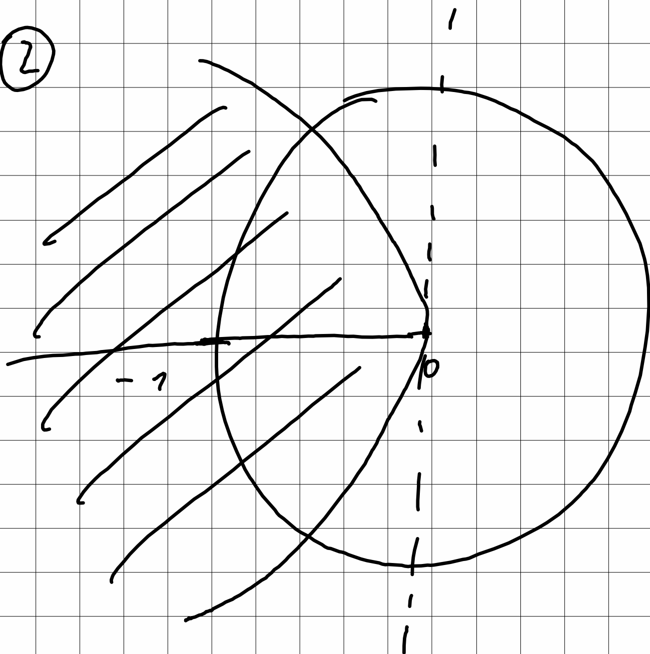
$$\frac{1\cdot a^{x_1} + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot a^{\frac{x_2}{2}}\right) + \dots + n\cdot\left(\frac{1}{n}a^{\frac{x_n}{n}}\right)}{1+2+\dots+n} \geq$$

$$\geq \left(\frac{a^{x_1+x_2+\dots+x_n}}{1\cdot 2^2\cdot\ldots\cdot n^n}\right)^{\frac{2}{n(n+1)}} =$$

$$= \left(\frac{1}{1\cdot 2^2\cdot\ldots\cdot n^n}\right)^{\frac{2}{n(n+1)}} \geq \left(\frac{1}{(n!)^n}\right)^{\frac{2}{n(n+1)}} =$$

$$= (n!)^{-\frac{2}{n+1}}$$

(2)



Fie $\alpha = \arg z$

z, z^2, z^3 sunt în zona hașurată

Deci $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

$2\alpha \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$

$3\alpha \in \left(\frac{\pi}{2} + 2l\pi, \frac{3\pi}{2} + 2l\pi\right)$

$k, l \in \mathbb{Z}$

Dacă

$$\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \Rightarrow 2\alpha \in (\pi, 2\pi]$$

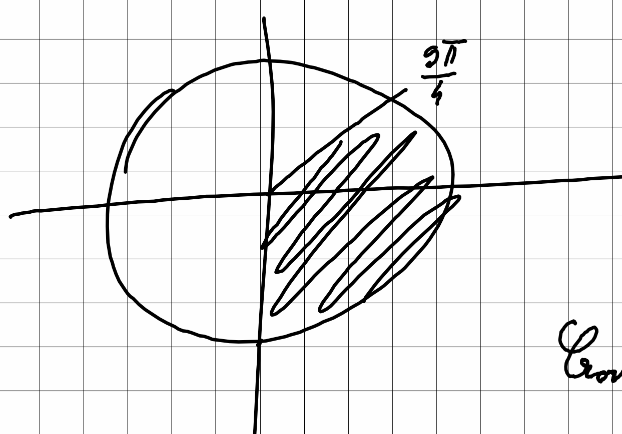
$$2\alpha \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$$

Atunci

$$3\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{9\pi}{4}\right)$$



Contradicție

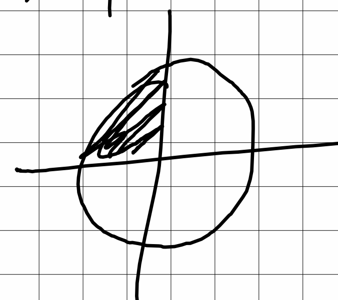
cu

$$3\alpha \in \left(\frac{\pi}{2} + 2l\pi, \frac{3\pi}{2} + 2l\pi\right)$$

Dacă $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

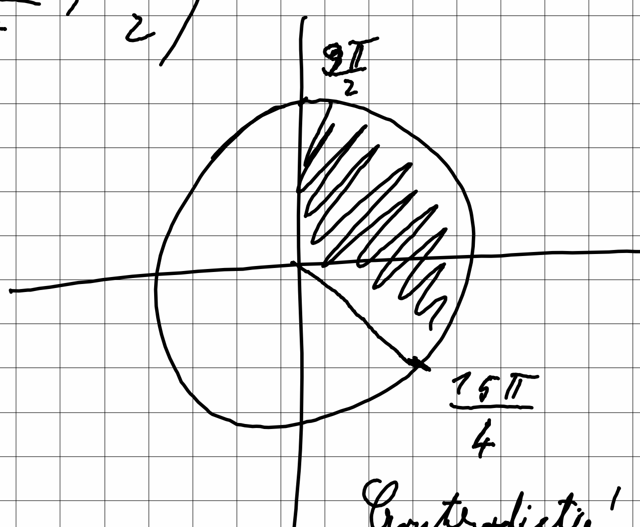
$$\left.\begin{array}{l} 2\alpha \in (2\pi, 3\pi) \\ 2\alpha \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{3\pi}{2} + k\pi\right) \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\alpha \in \left(\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right)$$



$$\alpha \in \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\alpha \in \left(\frac{15\pi}{4}, \frac{9\pi}{2}\right)$$



Contradicție!

③ Arăt că $(\forall)$ $x<y$,

$f([x,y])$ este intervalul de capete $f(x)$ și $f(y)$.

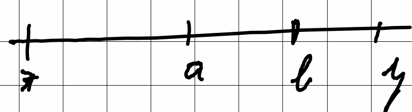
Presupunem contrariul

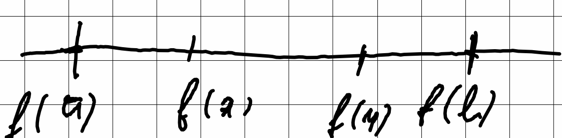
$f([x,y]) = [f(a), f(b)]$ cu

$a \in (x,y)$ sau $b \in (x,y)$

Să luăm $a \in (x,y)$ și $a < b$

(fără a restrânge generalitatea)





$f([a,b])$ este un interval închis, de lungime $r \cdot (b-a)$ și conține pe $f(a)$ și $f(b)$.

Deci $f(b)-f(a) \leq r\cdot(b-a)$.

În schimb, $f([x,y]) = [f(a), f(b)]$,

deci $f(b)-f(a) = r\cdot(y-x)$.

Rezultă $x-y \leq b-a$, contradicție.

Deci $f([x,y]) = [f(x), f(y)]$

sau

$[f(y), f(x)]$

În particular, $|f(x)-f(y)| = r\cdot|x-y|$,

$(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$

Dem. că f e monotonă.

Ip. abs. că f nu e monotonă $\Rightarrow$

$\Rightarrow (\exists)\ x < y < z$ a.î.

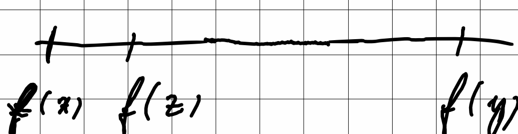
$$f(x) > f(y) < f(z)$$

sau

$$f(x) < f(y) > f(z)$$

Dacă $f(x) > f(y) < f(z)$

Fără a restrânge generalitatea, presupunem $f(x) \leq f(z)$



Deci $|f(x)-f(z)| < |f(y)-f(x)|$

$$r(x-z) < r(y-x)$$

Contradicție cu $y \in (x,z)$

Deci f e monotonă.

În cazul în care $f \nearrow$

$$f(x)-f(y) = r(x-y)$$

Pt $x \geq 0$ $\quad f(x) = f(0) + rx$

Pt. $x < 0$ $\quad f(0) - f(x) = r(0-x)$

Deci $f(x) = \lambda + r \cdot x$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Dacă $f \searrow$, analog

$$f(x) = \lambda - r \cdot x, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(4) Notăm $d = a+b+c$ și

$$r = |a| = |b| = |c| = |d|$$

Dacă $r = 0$, gata

Dacă $r \neq 0$

$$a+b+c = d \Rightarrow a+b = d-c$$

Conjugăm

$$\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{d} \qquad r^2 = a \cdot \bar{a}$$

$$\frac{r^2}{a} + \frac{r^2}{b} + \frac{r^2}{c} = \frac{r^2}{d} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{d} - \frac{1}{c}$$

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{c-d}{dc}$$

Dacă $a+b=0$, gata

Dacă nu, $a+b=d-c\neq 0$,

deci putem simplifica:

$$\frac{1}{ab}=-\frac{1}{dc}$$

$$ab=-dc$$

Adică $\frac{ab}{c}=-d$

Analog, dacă $a+c\neq 0$ și $b+c\neq 0$,

obținem $\frac{ac}{b}=-d$

$$\frac{bc}{a}=-d$$

Deci $\frac{ab}{c}=\frac{ac}{b}\Rightarrow b^2=c^2$

$$\frac{ac}{b}=\frac{bc}{a}\Rightarrow a^2=c^2$$

Rezultă $a^2 = b^2 = c^2$.

Dacă $a = b = c \Rightarrow$ $a = 3d$, dar

$|a| = |d| \neq 0$, deci

e imposibil

Rămâne ca două din a, b, c

să fie distincte, fie ele

a și b

Dar $\left.\begin{array}{l} a^2 = b^2 \\ a \neq b \end{array}\right| \Rightarrow a = -b \Rightarrow$

$\Rightarrow a + b = 0$

$\square$

(5) Suma din enunț, notată S, provine din:

$(1 + i\sqrt{m})^n =$

$= C_n^0 + i\sqrt{m}\, C_n^1 - m\, C_n^2 - i(\sqrt{m})^3 C_n^3 + \dots$

Rezultă că $S = \frac{1}{\sqrt{m}} \operatorname{Im}\left((1 + i\sqrt{m})^n\right)$

Fie $z = \cos\frac{k\pi}{n} + i\sin\frac{k\pi}{n}$,

de unde $z^n = \pm 1$, în funcție de paritatea lui k

$$z = \cos\frac{k\pi}{n}\left(1 + i\,tg\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$= \cos\frac{k\pi}{n}\left(1 + i\sqrt{m}\right)$$

Deci $z^n = \cos\frac{k\pi}{n} \cdot \left(1 + i\sqrt{m}\right)^n$,

de unde $\left(1 + i\sqrt{m}\right)^n = \dfrac{\pm 1}{\cos\frac{k\pi}{n}}$

În particular,

$Im\left(1 + i\sqrt{m}\right)^n = 0$, deci $S = 0$.

⑥ Observăm că niciun număr $x<0$ nu verifică ecuația și nici $x=1$ nu e soluție.

Observăm că, dacă x este soluție a ecuației date, atunci $y=\frac{1}{x}$ verifică ecuația

$$2^{\frac{3}{y}-1}\cdot 3^{3y-1}+3^{\frac{3}{y}-1}\cdot 5^{3y-1}+$$

$$+5^{\frac{3}{y}-1}\cdot 2^{3y-1}=2^{8}+3^{8}+5^{8}.$$

Vom rezolva mai întâi ecuația pentru $x\in(1,\infty)$. Observăm că $x=3$ e soluție.

Ne interesează pe ce interval

$$x\to a^{3x-1}\cdot b^{\frac{3}{x}-1}$$ e strict crescătoare

unde $a,b\in\{2,3,5\}$

$a\neq b$.

Fie $x > y > 1$

$$a^{3x-1} \cdot b^{\frac{3}{x}-1} > a^{3y-1} \cdot b^{\frac{3}{y}-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^{3(x-y)} > b^{\frac{3}{y}-\frac{3}{x}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^{3(x-y)} > b^{\frac{3(x-y)}{xy}} \quad \Big| \ ^{\frac{xy}{3(x-y)}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^{xy} > b.$$

Observăm că, pt. $a \neq b$,

$a, b \in \{2, 3, 5\}$,

este suficient $x \geq 2$, $y \geq 2$ pt. ca $a^{xy} > b$.

Deci funcția

$$x \rightarrow 2^{3x-1} \cdot 3^{\frac{3}{x}-1} + 3^{3x-1} \cdot 5^{\frac{3}{x}-1} +$$

$$+ 5^{3x-1} \cdot 2^{\frac{3}{x}-1}$$

e strict crescătoare pe $[2, \infty)$,

deci, pe acest interval, avem soluția unică $x = 3$.

Dacă $x \in (1, 2)$

$$2^{3x-1} \cdot 3^{\frac{3}{x}-1} + 3^{3x-1} \cdot 5^{\frac{3}{x}-1} +$$

$$+ 5^{3x-1} \cdot 2^{\frac{3}{x}-1} < 2^5 \cdot 3^2 + 3^5 \cdot 5^2 +$$

$$+ 5^5 \cdot 2^2 <$$

$$< 3 \cdot 5^7 < 5^8 <$$

$$< 2^8 + 3^8 + 5^8.$$

Deci unica soluție pe $(1, \infty)$ este $x = 3$.

Pt. $x < 1$, procedăm exact la fel pentru ecuația verificată de $y = \frac{1}{x}$

$$2^{\frac{3}{y}-1}\cdot 3^{3y-1}+3^{\frac{3}{y}-1}\cdot 5^{3y-1}+$$

$$+5^{\frac{3}{y}-1}\cdot 2^{3y-1}=2^{8}+3^{8}+5^{8}.$$

De unde obținem $y=3$,

deci $x=\frac{1}{3}$ este unica soluție pe intervalul $(0,1)$.

⑦ a) injective. Condiție: $n \geq m$

$f(1)$ ales în n moduri

Pt. fiecare alegere a lui $f(1)$,

$f(2)$ ales în $(n-1)$ moduri

$\vdots$

$f(m)$ ales în $(n-m+1)$ moduri.

Răspuns: $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)=A_n^m$

b) strict crescătoare

Imaginea $\mathrm{Im} f$ are exact m elemente

Rezultă condiția $n \geq m$.

Dată fiind o submulțime cu m elem.

$\{a_1, a_2, \dots, a_m\} \subset \{1, 2 \dots n\}$

$\mathrm{Im} f = \{a_1, a_2, \dots a_m\} \iff$

$\iff f(1) = \min \{a_1 \dots a_m\}$

$f(2) = \min \{a_1, \dots a_m\} \setminus \{f(1)\}$

$\vdots$

Deci funcția e unic determinată de imaginea sa, submulțime cu m elemente în $\{1, 2 \dots n\}$

Răspuns: C_n^m

c) crescătoare

Fie $f : \{1, 2, \dots, m\} \to \{1, 2 \dots n\}$

crescătoare.

Definim

$g : \{1, 2, \dots, m\} \to \{2, \dots, m+n\}$

$g(x) = f(x) + x$ funcție strict crescătoare

Reciproc, pentru fiecare

$g : \{1, 2, \dots, m\} \to \{2, \dots, m+n\}$, strict crescătoare

avem $g(1) \geq 2$

$g(2) > g(1) \geq 2 \Rightarrow g(2) \geq 3$

$g(3) > g(2) \Rightarrow g(3) \geq 4$

Inductiv, $g(x) \geq x + 1$, $(\forall) x$

$$g(m) \leq m+n$$

$$g(m-1) < g(m) \leq m+n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(m-1) \leq n+m-1$$

Inductiv $g(x) \leq n+x$

$$x+1 \leq g(x) \leq n+x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \leq g(x) - x \leq n$$

Rezultă că funcția:

$$f:\{1,2,\dots m\} \to \{1,2,\dots n\}$$

$$f(x) = g(x) - x$$

e bine definită

$$g(x+1) - g(x) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x+1) - g(x) \geq 1, \text{ deci}$$

$$g(x+1) - (x+1) \geq g(x) - x,$$

adică f e crescătoare.

Am asociat fiecărei funcții crescătoare

$$\{1, 2 \dots m\} \to \{1, 2 \dots n\}$$

îi asociem o unică funcție strict crescătoare

$$\{1, 2, \dots, m\} \to \{2, 3, \dots, m+n\}$$

Răspuns : C_{m+n-1}^{m}

d)

$$f(x+1) \geq f(x) + 2, \ (\forall) x$$

deci $f(2) \geq f(1) + 2 \geq 1 + 2 = 3$

$f(3) \geq f(2) + 2 \geq 3 + 2 = 5$

Inductiv, $f(x) \geq 2x - 1$.

Condiție : $n \geq 2m - 1$

Fie $f: \{1, 2, \dots m\} \to \{1, 2, \dots n\}$

cu proprietatea din enunț.

Definim

$g: \{1, 2, \dots m\} \to \{0, 1, \dots n-m\}$,

$g(x) = f(x) - x$.

$f(x) \geq 2x - 1 \Rightarrow g(x) \geq x - 1$

$f(m) \leq n$

$f(m-1) \leq f(m) - 2 \leq n - 2$

$f(m-2) \leq n - 4$

Inductiv, $f(x) \leq n - 2(m-x) =$

$= 2x + n - 2m$,

deci $g(x) \leq x + n - 2m \leq n - m$

Rezultă că g e bine definită.

g e strict crescătoare, căci

$$g(x+1) - g(x) = f(x+1) - (x+1) - f(x) + x$$

$$= f(x+1) - f(x) - 1 \geq 0$$

Reciproc, pentru

$$g : \{1, 2, \dots m\} \to \{0, 1, \dots, n-m\}$$

strict crescătoare,

$$f : \{1, 2, \dots m\} \to \{1, 2, \dots n\}$$

$$f(x) = g(x) + x$$

are proprietatea din enunț.

Răspuns: C^{m}_{n-m+1}

(8) $$f(x^y) = \left(f(x)\right)^{f(y)}$$

$$x = 1 \Rightarrow \left(f(1)\right)^{f(y)} = f(1),$$

$(\forall)\ y$

Deci $f \equiv 1$ sau $f(1) = 1$.

Dacă f e constantă, atunci $f \equiv 1$.

Presupunem acum f neconstantă

Deci $f(1) = 1$.

Fie $z \in (0,1)$

$$f\left((x^z)^y\right) = \left(f(x^z)\right)^{f(y)}$$

$$= \left(f(x)^{f(z)}\right)^{f(y)}$$

$$= f(x)^{f(z) \cdot f(y)}$$

Pe de altă parte,

$$f\left((x^z)^y\right) = f\left(x^{zy}\right) = \left(f(x)\right)^{f(zy)}.$$

$$\left(f(x)\right)^{f(zy)} = f(x)^{f(z)\cdot f(y)},$$

deci, alegând x a.î. $f(x) \neq 1$,

$$f(zy) = f(z)\cdot f(y), \quad (\forall)\ z, y \in (0,\infty)$$

Din relația de mai sus:

$$f(x^z \cdot x^y) = f(x^z)\cdot f(x^y)$$

$$f(x^{z+y}) = \left(f(x)\right)^{f(z)} \cdot \left(f(x)\right)^{f(y)}$$

$$\left(f(x)\right)^{f(z+y)} = \left(f(x)\right)^{f(z)+f(y)},$$

deci $f(z+y) = f(z) + f(y)$.

Am obținut

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y)$$

Din $f(x+y) = f(x) + f(y)$

obținem $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$.

Deci $f\left(\frac{n}{m}\right) \cdot m = f(n) = n \cdot f(1) = n$

adică $f(q) = q$, $(\forall)\ q \in \mathbb{Q}_+$

f e crescătoare, din $f(x+y) = f(x) + f(y)$

și $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$,

deci $f(x) = x$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

⑨ „ b) $\Rightarrow$ a"

$|z| = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow |az + b\bar{z}| \le |a| \cdot |z| + |b| \cdot |\bar{z}| =$

$= |a| + |b| \le 1$

„ a) $\Rightarrow$ b)"

a) $\Leftrightarrow \left| a \frac{z}{\bar{z}} + b \right| \le 1, \ (\forall) z \in \mathbb{C}, \ |z| = 1$

$|z| = 1 \Rightarrow z \cdot \bar{z} = 1 \Rightarrow \frac{z}{\bar{z}} = z^2.$

Deci a) $\Leftrightarrow |az^2 + b| \le 1, \ (\forall) z \in \mathbb{C}, \ |z| = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |at + b| \le 1, \ (\forall) t \in \mathbb{C}, \ |t| = 1,$

căci orice astfel de $t \in \mathbb{C}$ $|t| = 1$ admite o rădăcină pătratică, tot de modul 1.

Demonstrăm

$$|a t + b| \le 1, \ (\forall)\, t \in \mathbb{C},\ |t| = 1 \implies |a| + |b| = 1$$

Dacă $a = 0$ sau $b = 0$, gata

Dacă nu,

Fie $t \in \mathbb{C}$, $|t| = 1$ a.î. $\frac{b}{a} = \left|\frac{b}{a}\right| \cdot t.$

$$|a t + b| = \left| b \cdot \left|\frac{a}{b}\right| + b \right| =$$

$$= |b| \cdot \left| \left|\frac{a}{b}\right| + 1 \right|$$

$$= |b| \cdot \left(\left|\frac{a}{b}\right| + 1 \right) = |a| + |b|$$

Dar $|a t + b| \le 1$, deci $|a| + |b| \le 1$. $\square$